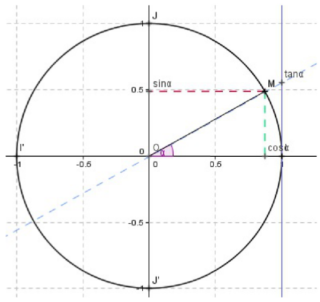
Fonctions trigonométriques

Objectifs :

- renforcer la maîtrise des formules de calcul vues en première
- introduire les notions de fonctions paire, impaire, périodique
- étudier les fonctions sinus et cosinus, et les fonctions construites à partir de celles-ci

Aperçu historique :

Historiquement, la trigonométrie (du grec trigonos : triangulaire et métron : mesure)est la science qui traite des relations entre les distances et les angles dans un triangle. Par extension, la trigonométrie traite aussi des fonctions trigonométriques : sinus, cosinus, tangente...
La trigonométrie a des applications dans de nombreux domaines : optique géométrique, équilibre de forces, calculs astronomiques, mouvements circulaires... La trigonométrie a permis l'invention de nouveaux types de repérages de l'espace et du plan, autres que le repérage cartésien "classique" : coordonnées polaires, cylindriques...



1. Définitions et premières propriétés (2nde)

On appelle *lignes trigonométriques* les caractéristiques d'un angle : *cosinus, sinus, tangente...*
Pour la démonstration des propriétés de seconde et de première rappelées ci-dessous, se référer aux cours de ces niveaux, que vous trouverez sur le site http ://maths.langella.free.fr
La quasi-totalité de ces formules peuvent être facilement "retrouvées" en dessinant un cercle trigonométrique.

Définition 12.1 Soient x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Le cosinus de x est le réel noté $\cos(x)$ égal à l'abscisse de M. Le sinus de x est le réel noté $\sin(x)$ égal à l'ordonnée de M.

Propriété 12.1 Pour tout réel x et tout entier relatif k on a :

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$	$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$
$-1 \leq \sin(x) \leq 1$	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$

2. Angles associés (1ère)

Propriété 12.2 Soit x un réel. On a :

$$\cos(-x)=\cos(x) \qquad \cos(\pi-x)=-\cos(x) \qquad \cos(x+\pi)=-\cos(x)$$
$$\sin(-x)=-\sin(x) \qquad \sin(\pi-x)=\sin(x) \qquad \sin(x+\pi)=-\sin(x)$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$$

3. Formules d'addition et de duplication (1ère)

Ces formules s'obtiennent en tant qu'application du produit scalaire. Les formules de duplication se déduisent des formules d'addition en "prenant deux fois la même variable".

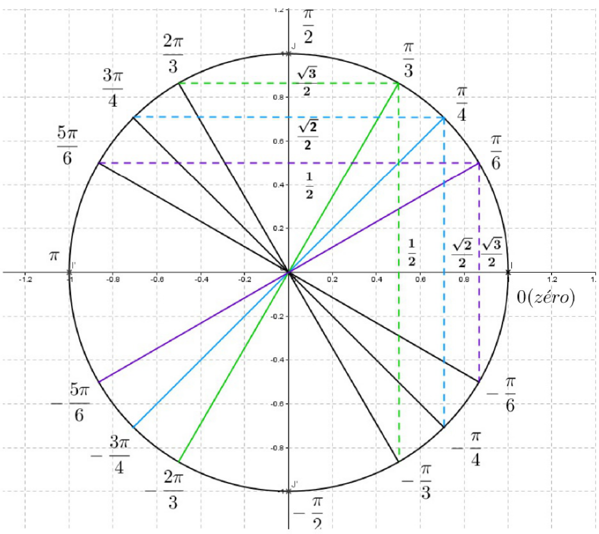
Propriété 12.3 (Formules d'addition) Soit a et b deux réels. Alors :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Propriété 12.4 (Formules de duplication) Soit a un réel. Alors :
$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$ et $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

4. Valeurs particulières (2nde)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



5. Équations (1ère)

Propriété 12.5 Soient x et y deux réels quelconques :
- l'égalité $\cos x=\cos y$ équivaut à $x=\pm y+2k\pi$;
- l'égalité $\sin x=\sin y$ équivaut à $x=y+2k\pi$ ou $x=\pi-y+2k\pi$.

Les équations du type $\cos x=a$ ou $\sin x=b$ se ramènent aux cas traités dans la propriété en posant $a=\cos\alpha$ (où $\alpha=\arccos a$), ou $b=\cos\beta$ (où $\beta=\arccos b$) ; on peut aussi "reconnaître" α ou β s'il s'agit de l'une des "valeurs particulières" du tableau ci-dessus.

6. Fonctions sinus et cosinus

Définition 12.2 La fonction *cosinus* (resp. *sinus*) est la fonction qui à tout réel x associe le réel $\cos x$ (resp. $\sin x$).

A. Parité, imparité

Définition 12.3 Une fonction f est dite *paire* ssi :
- son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0
- $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(-x) = f(x)$

Propriété 12.6 La représentation graphique d'une fonction *paire* dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) (symétrie axiale). On peut en déduire une réduction du domaine d'étude à $\mathbb{R}_+$.

Propriété 12.7 La fonction *cosinus* est *paire*.

Définition 12.4 Une fonction f est dite *impaire* ssi :
- son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0
- $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$

Propriété 12.8 La représentation graphique d'une fonction *impaire* dans un repère orthonormé est symétrique par rapport à l'origine (O) du repère (symétrie centrale). On peut en déduire une réduction du domaine d'étude à $\mathbb{R}_+$.

Propriété 12.9 La fonction *sinus* est *impaire*.

B. Périodicité

Définition 12.5 Une fonction f est dite *périodique de période T* ssi $\forall x \in \mathscr{D}_f$, on a :
- $x + T \in \mathscr{D}_f$
- $f(x+T) = f(x)$

Propriété 12.10 La représentation graphique d'une fonction *T-périodique* dans un repère orthonormé peut être obtenue par translations à partir de la représentation graphique de la fonction dans un intervalle de largeur *T*. On peut en déduire une réduction du domaine d'étude à un intervalle de largeur *T*.
On dira que la fonction est *périodique de période T*, ou encore qu'elle est *T-périodique*.

N.B. : Si la fonction est également paire ou impaire, il peut être pertinent de choisir cet intervalle centré en 0.

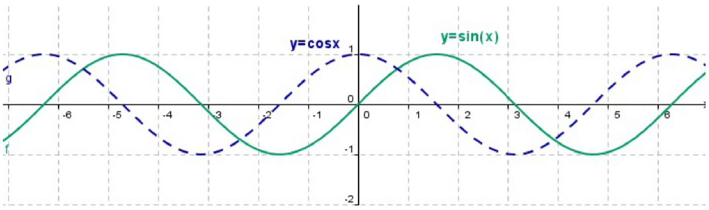
Propriété 12.11 Les fonctions *cosinus* et *sinus* sont 2π*-périodiques*.

C. Dérivée

Propriété 12.12 (admise) Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$

On en déduit les dérivées des fonction composées construites à partir de fonctions trigonométriques.
On proposera une démonstration de cette propriété lorsque nous étudierons la forme exponentielle et la forme trigonométrique d'un nombre complexe.

D. Représentation graphique



7. Applications

A. En physique

En physique, une onde peut être observée de deux façons :

- soit on "regarde" l'onde en un point donné d'abscisse x, et on observe la perturbation du milieu en ce point *en fonction* du temps t ; ceci permet par exemple de mesurer la période T.
- soit on prend une vision spatiale à un instant donné (on prend une photo du milieu dans lequel on observe l'onde) et on observe la perturbation A du milieu à cet instant *en fonction* de la position x ; on peut alors mesurer la longueur d'onde λ.

En notant A_0 l'amplitude, λ la longueur d'onde et ϕ, ϕ' les phases à l'origine, pour la vision spatiale on a :

$$x(t) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

On a bien $x(t+T) = x(t)$. Si on veut connaître la vitesse de l'onde à chaque instant, on calcule la dérivée de la position par rapport au temps . On a alors (en utilisant la notation "physicienne" des dérivées) :

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t) = A_0 \times \frac{2\pi}{T} \times \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) = \frac{2A_0\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right)$$

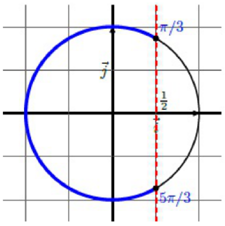
Pour la vision temporelle on a :

$$A(x) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \phi'\right)$$

B. Inéquations

1er exemple : Résoudre $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$

Dans le cercle trigonométrique, on repère les valeurs de x pour lesquelles $\cos x$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$:



Donc $\mathscr{S} = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$. On n'a pas besoin de donner les solutions "modulo π" car l'énoncé a restreint la recherche de solutions à l'intervalle $[0; 2\pi]$.

2ème exemple : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation $4\sin^2(x)-1 \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned} 4\sin^2(x)-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow & \quad (2\sin(x))^2 - 1^2 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & \quad (2\sin(x)-1)(2\sin(x)+1) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Or sur $[0;2\pi]$ on a $2\sin(x)-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin(x) \geqslant \frac{1}{2}$, soit $x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$.
De même, $2\sin(x)+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin(x) \geqslant -\frac{1}{2}$, soit $x \in \left[0;\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$.
On obtient donc la tableau de signes suivant :

x	0		$\pi/6$		$5\pi/6$		$7\pi/6$		$11\pi/6$		2π
$2\sin(x)-1$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$2\sin(x)+1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$4\sin^2(x)-1$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

C. Calculs de limites

Cherchons à déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

C'est une forme indéterminée car $\sin(0)=0$. En revanche, si on la voit comme la limite d'un taux de variation, il vient :

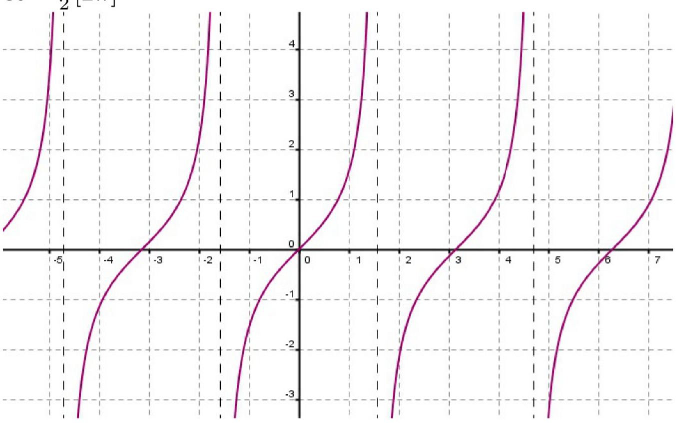
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$$

Il s'agit de la définition du nombre dérivé de la fonction sinus en 0, donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

D. Fonction tangente

La fonction tangente est traitée dans le dernier exercice ; c'est la troisième "fonction trigonométrique classique".
Dans le cercle trigonométrique, on trace l'axe des tangentes à droite du cercle, tangent au cercle et perpendiculaire à l'axe de cosinus. On le gradue de la même manière que l'axe des sinus.
La graduation correspondant à l'intersection de l'axe des tangentes et de la demi-droite $[OM)$ donne la valeur de $\tan x$.
On peut aussi définir la tangente par la caractérisation $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
La tangente peut prendre n'importe quelle valeur réelle, mais cette fonction est discontinue en tous les $\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $-\frac{\pi}{2}[2\pi]$



8. Synthèse du chapitre : formulaire

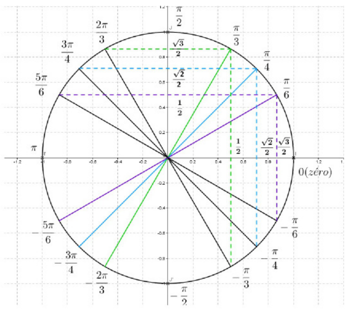
A. Sommes, différences, duplications

$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$
$\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$
$\sin^2(a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2a))$

B. Éléments de symétrie

$\cos(x+\pi) = -\cos x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
$\sin(x+\pi) = -\sin x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$



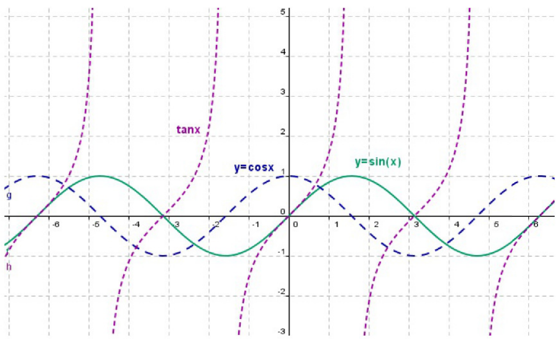
C. Équations et inéquations

$\sin x = \sin y$ équivaut à $x = y[2\pi]$ ou $x = \pi - y[2\pi]$.
$\cos x = \cos y$ équivaut à $x = y[2\pi]$ ou $x = -y[2\pi]$.
Pour résoudre une équation du type $\sin x = \cos y$,

- on écrit $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et l'équation devient $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos y$.
- ou, on écrit $\cos y = \sin(\frac{\pi}{2} - y)$ et l'équation devient $\sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - y)$.

D. Étude des fonctions

La fonction sin est 2π -périodique donc on peut restreindre son étude à $[-\pi;\pi]$.
De plus, elle est impaire, donc on l'étudie sur $[0;\pi]$.
La fonction cos est 2π -périodique donc on peut restreindre son étude à $[-\pi;\pi]$.
De plus, elle est paire, donc on l'étudie sur $[0;\pi]$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos' x = -\sin x$ et $\sin' x = \cos x$.



E. Tableau des valeurs particulières

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0